数理解析研究所講究録
278巻 1976年 35-42

Derivation of self-adjoint algebras

宮城教育大　　板垣 芳雄

近年 C^*-algebra の one parameter $*$ automorphism group がその infinitesimal generator となる (unbounded) derivation との関係でいろいろ調べられている。そのとき，derivation は一般に C^*-algebra 全体でなくその dense subalgebra で定義されたもので，bounded でない限り定義域全体とはならず，当然のことながら inner でない。そこで一般に Hilbert space 上 unbounded となる operator を含む $*$-algebra ; self-adjoint algebra $\mathfrak{A}$ について $\mathfrak{A}$ の inner $*$ automorphism group，$\mathfrak{A}$ 全体で定義される inner $*$ derivation について考えてみたい．derivation が inner というのは $\mathfrak{A}$ のうち bounded な operator のなす algebra $\mathfrak{A}_b$ についていえば，derivation を定義する unbounded operator が $\mathfrak{A}_b$ に affiliate する場合に相当する。

まず s.a. algebra $\mathfrak{A}$ の定義，位相等について記す。次に $\mathfrak{A}$ 上の * derivation と * automorphism group の定義を述べる。事はその関係を議論するまで行かず，続く内容はそれを調べる目安として，まず unitary semi-group とその generator との関連で algebra を考えた段階のものである。最後に関連して有限自由度 CCR の Schrödinger 表現についてふれる。

§1．定義を記す前に１つの例について考える。

A を Hilbert space $\mathcal{H}$ 上の maximal symmetric operator，$\Phi = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$ は $\mathcal{H}$ で dense とする。ここに $\mathcal{D}(T)$ は T の domain を表わす。A の positive deficiency；$\{ x \mid A^* x = i x \}$ の次元は 0 とする。$V_t = e^{-itA}$ $t \geq 0$ は isometric semi-group であり，$\mathcal{D}(A)$ 上 $V_t A = A V_t$ が成立する。よって特に $V_t \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A)$ であり，$V_t \mathcal{D}(A^n) \subset \mathcal{D}(A^n)$ が成立するから $V_t \Phi \subset \Phi$．

いま adjoint semi-group V_t^* について

$$V_t^* \Phi \subset \Phi$$

が成立すると仮定する。strongly convergence の意味で

$$\frac{d}{dt} V_t^* = i A^* V_t^* = i V_t^* A^*$$

また Φ 上では $A = A^*$ であるから

$$\frac{d}{dt} V_t V_t^* = -iA V_t V_t^* + V_t iA V_t^* = 0$$

一方 $\lim_{t \to 0} V_t V_t^* x = x$, $x \in \Phi$. ゆえに

$$V_t V_t^* = I \quad \text{on } \Phi$$

Φ は $\mathcal{H}$ で dense であるから $V_t V_t^* = I$ on $\mathcal{H}$ 。

従って V_t は unitary operator になり, A は self-adjoint operator である。以上より

V_t, V_t^* はともに Φ から Φ への operator である（i.e. Φ の image は Φ に含まれる）ための必要十分条件は, A が self-adjoint operator なることである。

さて, $\mathcal{H}$ を Hilbert space, Φ を $\mathcal{H}$ の dense な linear subspace とする。Φ から Φ への linear operator 全体を $\mathcal{L}(\Phi)$, $\mathcal{L}(\Phi)$ の元 A で $\mathcal{H}$ での adjoint A^* （の Φ への restriction A^+ ）がまた $\mathcal{L}(\Phi)$ に属すようなもの全体を $\mathcal{L}^+(\Phi)$ で表わす。

$\mathcal{L}^+(\Phi)$ の identity I を含む $*$-subalgebra $\mathfrak{A}$, involution は $A \longrightarrow A^+$, が次の条件をみたすとき, $\mathfrak{A}$ は self-adjoint であるという.

$$\Phi = \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} \mathcal{D}(A), \qquad \mathcal{D}(T) \text{ は } A \text{ の domain}$$

$\mathcal{L}^+(\Phi)$ に次の semi-norm 系により topology (weak topology) を導入する。

$$|(Ax, y)|, \qquad x, y \in \Phi$$

$\mathfrak{A}$の元で$\mathfrak{H}$上bounded であるようなもの全体を$\mathfrak{A}_b$と記すことにする。いま s.a. algebra $\mathfrak{A}$ において $\mathfrak{A}_b$ が $\mathfrak{A}$ で weakly dense であるとき，$\mathfrak{A}$ の double commutant $\mathfrak{A}''$ は $\mathfrak{A}$ の weak closure $\mathfrak{A}^{\sim}$ に等しい*)。ここに commutant $\mathfrak{A}'$ は次式で定義する．

$$\mathfrak{A}' = \{ C \in \mathcal{L}^{+}(\Phi) \mid CA = AC \quad \text{for } \forall A \in \mathfrak{A} \}$$

なお $\mathfrak{H}$ 上 bounded な operator 全体 $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ でとった commutant は ^{c} で表わすことにする。identification $\mathfrak{A}_b \subset \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ により

$$\mathfrak{A}_b{}^{c} = \{ C \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}) \mid CA = AC \quad \text{for } \forall A \in \mathfrak{A} \}$$

Lemma. $\mathfrak{A}$ を s.a. algebra とする．$\mathfrak{H}$ 上の bounded operator B について，$\mathfrak{A}$ の任意の元 A に対し $\mathcal{D}(\bar{A})$ 上 $B\bar{A} = \bar{A}B$ が成立すれば，$B \in \mathcal{L}(\Phi)$ である。

Proof. 条件より $B\mathcal{D}(\bar{A}) \subset \mathcal{D}(\bar{A})$

ゆえに
$$B \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} \mathcal{D}(\bar{A}) \subset \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} \mathcal{D}(\bar{A}) = \Phi$$

これより次が知れる．

Corollary. $\mathfrak{A}$ を s.a. algebra とすると

$$(\mathfrak{A}')_b = \mathfrak{A}' \cap \mathcal{B}(\mathfrak{H})$$

は * algebra である．

---

*) 板垣芳雄，Double commutant theorem for topological *-algebras，数理解析研究所講究録 210

§2. 以下 $\mathfrak{A}$ は s.a. algebra とする。

$\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{A}$ への linear operator σ が次の条件をみたすとき σ は $\mathfrak{A}$ 上の $*$ automorphism であるという。

(1) $\sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B)$

(2) $\sigma(I) = I$

(3) $\sigma(A^+) = \sigma(A)^+$

σ が $\mathfrak{A}$ の元 V により $\sigma(A) = V^+AV$ と表わされるとき σ は inner であるという。このとき (3) は自然に成立する。また (2) が成立すれば $V^+V = I$ より (1) は成立し しかも V は $\mathcal{H}$ の内積について isometry でなければならず, V が Φ から Φ への bijection のとき V in $\mathcal{H}$ の closure は unitary operator, $\mathfrak{A}_b^{cc}$ が finite のときも V は unitary である。

$\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{A}$ への linear operator δ が次の条件をみたすとき, δ は $*$ derivation であるという。

(1) $\delta(AB) = \delta(A)B + A\delta(B)$

(2) $\delta(I) = 0$

(3) $\delta(A^+) = -\delta(A)^+$

δ が $\mathfrak{A}$ の元 H により $\delta(A) = AH - HA$ と表わされるとき δ は inner であるという。このとき (1), (2) は自然に成立する。また (3) が成立することから H は symmetric operator $\frac{H+H^+}{2}$ にとりかえることができる。

§3. $\mathfrak{A}$ は weakly closed な s.a. algebra とする。

$\mathfrak{A}$ の元からなる one-parameter (strongly continuous) unitary semi-group $V_t = e^{-itH}$ について，どのような条件のもとで self-adjoint operator H が $\mathfrak{A}$ の元になるか，およびその逆の成立条件について考える。

Theorem. $V_t = e^{-itH} \in \mathfrak{A}$ のとき次の一つを満たせば $B = -iH \in \mathfrak{A}$ である。

(1) Φ に topology を導入し，その topology について Φ が weak complete のとき，さらに

$$< \frac{V_t - I}{t} x, x' > \;\to\; < Bx, x' >, \text{ for } \forall x \in \Phi, x' \in \Phi'$$

as $t \to 0$

(2) $$\left(\frac{V_t - I}{t} x, y \right) \;\to\; (Bx, y), \text{ for } \forall x, y \in \Phi$$

でかつ

$$\bigcap_{C \in \{V_t\}'} \mathcal{D}(C^{+*}) = \Phi$$

ここに $B \in \mathcal{L}(\Phi)$ を保証する後の方の条件を以下では「$\{V_t\}'$ が十分たくさんある」ということにする。

(3) $\mathcal{D}(B) \supset \Phi$ でかつ

$\{V_t\}'$ が十分たくさんある。

Theorem. $H \in \mathfrak{A}$ が essentially self-adjoint のとき次の一つを満たせば $V_t = e^{-itH} \in \mathfrak{A}$ である。

(1) resolvents $(\bar{H} - \lambda I)^{-1} \in \mathfrak{A}$ でかつ

$\{H\}'$ が十分たくさんある.

(2) H の spectral measure $E_\lambda \in \mathfrak{A}$ でかつ

$\{H\}'$ が十分たくさんある.

(3) bounded self-adjoint operator の列 $\{H_n\}$ で

$$H H_n = H_n H$$

$$e^{-itH_n} \in \mathfrak{A}$$

$$\lim_{n\to\infty} H_n x = H x, \quad x \in \mathfrak{D}$$

なるものが存在し，かつ

$\{V_t\}'$ が十分たくさんある。

(4) H が lower semi-bounded,

$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(e^{n\bar{H}}) \supset \mathfrak{D}$ でかつ

$\{H\}'$ が十分たくさんある。

§4. 有限自由度の CCR（正準交換関係）の Schrödinger 表現から生成される algebra $\mathfrak{A}$ を考える。（自由度 1 で書く。）

$$(Qf)(x) = x f(x)$$

$$(Pf)(x) = -i\frac{d}{dx} f(x)$$

ただし act する space は $\Phi = \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) = \mathcal{H}$ とする。

$\mathfrak{A}$ には e^{-itP}, e^{-itQ} を含めることができ, その weak closure は $\tilde{\mathfrak{A}} = \mathcal{L}^+(\Phi)$ でしかも s. a. algebra である。

逆に, Φ を $\mathcal{H}$ の dense subset, essentially self-adjoint operator $P, Q \in \mathcal{L}(\Phi)$ が

$$PQ - QP = I$$

$$\Phi = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(P^n) \cap \mathcal{D}(Q^n)$$

を満たし, $\{P, Q\}$ から生成される algebra $\mathfrak{A}$ について

$$\mathfrak{A}' = \{\alpha I\} \qquad (\text{irreducibility})$$

とすれば, CCR 条件から $\{P\}'$, $\{Q\}'$ が modulo $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ で十分たくさんあることから

$$e^{-itP}, \quad e^{-itQ} \in \mathcal{L}(\Phi)$$

となり, しかも $\{e^{-itP}, e^{-itQ}\}' = \mathfrak{A}' = \{\alpha I\}$.

よって von Neumann の unitary 同値を除く表現の一意性定理から, $\mathfrak{A}$ は先の Schrödinger 表現から作った algebra と同一視できる。